# Matemática

Aluno

# Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada - 01

## 3ª Série | 1° Bimestre

| Disciplina | Curso | Bimestre | Série |
|---|---|---|---|
| Matemática | Ensino Médio | 1° | 3ª |
| Habilidades Associadas | | | |
| - Resolver problemas de contagem, utilizando o princípio fundamental da contagem ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinações simples. | | | |
| - Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos. | | | |
| - Calcular a probabilidade de um evento. | | | |

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SOMANDO FORÇAS
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

# Apresentação

A Secretaria de Estado de Educação elaborou o presente material com o intuito de estimular o envolvimento do estudante com situações concretas e contextualizadas de pesquisa, aprendizagem colaborativa e construções coletivas entre os próprios estudantes e respectivos tutores – docentes preparados para incentivar o desenvolvimento da autonomia do alunado.

A proposta de desenvolver atividades pedagógicas de aprendizagem autorregulada é mais uma estratégia pedagógica para se contribuir para a formação de cidadãos do século XXI capazes de explorar suas competências cognitivas e não cognitivas. Assim, estimula-se a busca do conhecimento de forma autônoma, por meio dos diversos recursos bibliográficos e tecnológicos, de modo a encontrar soluções para desafios da contemporaneidade, na vida pessoal e profissional.

Estas atividades pedagógicas autorreguladas propiciam aos alunos o desenvolvimento das habilidades e competências nucleares previstas no currículo mínimo, por meio de atividades roteirizadas. Nesse contexto, o tutor será visto enquanto um mediador, um auxiliar. A aprendizagem é efetivada na medida em que cada aluno autorregula sua aprendizagem.

Destarte, as atividades pedagógicas pautadas no princípio da autorregulação objetivam, também, equipar os alunos, ajudá-los a desenvolver o seu conjunto de ferramentas mentais, ajudando-o a tomar consciência dos processos e procedimentos de aprendizagem que ele pode colocar em prática.

Ao desenvolver as suas capacidades de auto-observação e autoanálise, ele passa a ter maior domínio daquilo que faz. Desse modo, partindo do que o aluno já domina, será possível contribuir para o desenvolvimento de suas potencialidades originais e, assim, dominar plenamente todas as ferramentas da autorregulação.

Por meio desse processo de aprendizagem pautada no princípio da autorregulação, contribui-se para o desenvolvimento de habilidades e competências fundamentais para o aprender-a-aprender, o aprender-a-conhecer, o aprender-a-fazer, o aprender-a-conviver e o aprender-a-ser.

A elaboração destas atividades foi conduzida pela Diretoria de Articulação Curricular, da Superintendência Pedagógica desta SEEDUC, em conjunto com uma equipe de professores da rede estadual. Este documento encontra-se disponível em nosso site www.conexaoprofessor.rj.gov.br, a fim de que os professores de nossa rede também possam utilizá-lo como contribuição e complementação às suas aulas.

Estamos à disposição através do e-mail curriculominimo@educacao.rj.gov.br para quaisquer esclarecimentos necessários e críticas construtivas que contribuam com a elaboração deste material.

**Secretaria de Estado de Educação**

## Caro aluno,

Neste documento você encontrará atividades relacionadas diretamente a algumas habilidades e competências do 1° Bimestre do Currículo Mínimo da 3° Série do Ensino Médio. Você encontrará atividades para serem trabalhadas durante o período de um mês.

A nossa proposta é que você, Aluno, desenvolva estes Planos de Curso na ausência do Professor da Disciplina por qualquer eventual razão. Estas atividades foram elaboradas a partir da seleção das habilidades que consideramos essenciais na 3° Série do Ensino Médio no 1° Bimestre.

Este documento é composto de um texto base, cuja leitura motivadora irá torna-lo capaz de compreender as principais ideias relacionadas a estas habilidades. Leia o texto e em seguida resolva as Fichas de Atividades. As Fichas de atividades devem ser aplicadas para cada dia de aula, ou seja, para cada duas horas/aulas. Para encerrar as atividades referentes a cada bimestre, ao final é sugerida uma pesquisa sobre o assunto.

Para cada Caderno de Atividades, iremos ainda fazer relações diretas com todos os materiais que estão disponibilizados em nosso site *Conexão Professor*, fornecendo, desta forma, diversos materiais de apoio pedagógico para que o Professor aplicador possa repassar para a sua turma.

Este caderno apresenta 04 (quatro) aulas. As aulas são compostas por uma **explicação base**, para que você seja capaz de compreender as principais ideias relacionadas às habilidades e competências principais do bimestre em questão, e **atividades** respectivas. Leia o texto e, em seguida, resolva as Atividades propostas. As Atividades são referentes a dois tempos de aula. Para reforçar a aprendizagem, propõem-se, ainda, uma **avaliação** e uma **pesquisa** sobre o assunto.

Neste Caderno de atividades, iremos estudar Análise Combinatória e Probabilidade. Na primeira parte do plano, iremos conhecer o Princípio Fundamental de Contagem e compreender como este assunto está relacionado à nossa vida. Em seguida, iremos aprender importantes ferramentas de contagem e, por fim, vamos trabalhar o cálculo de probabilidades.

Um abraço e bom trabalho!

**Equipe de Elaboração**

# Sumário

# Aula 1: Conhecendo o Princípio Fundamental da Contagem

Caro aluno, nesta aula você vai aprender a usar uma importante ferramenta de contagem, conhecida como Princípio Multiplicativo. Ao final desta aula, espera-se que você tenha adquirido familiaridade e habilidade no uso deste princípio e que distinga escolhas dependentes e independentes.

Vamos abordar o assunto através de situações-problemas resolvidas, começando com um problema simples, que contém a ideia do Princípio Multiplicativo.

## 1 – PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO:

**PROBLEMA 01:**

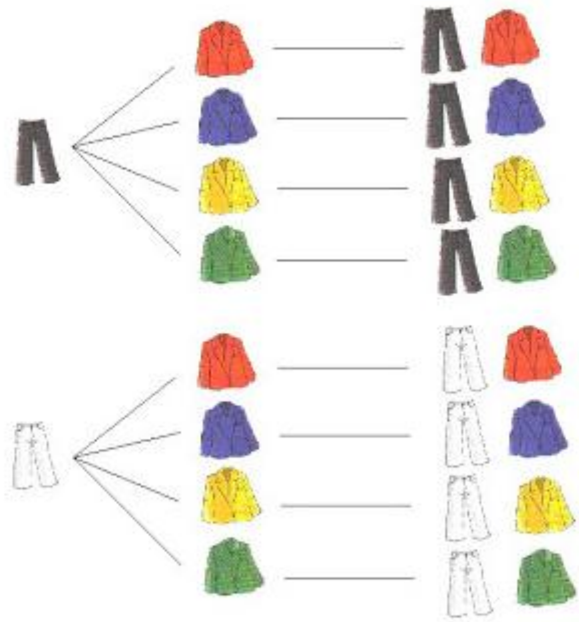
Maria tem 2 calças, uma preta e uma branca, e 4 blusas, uma amarela, uma azul, uma verde e uma vermelha. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

**Resolução:**

Podemos resolver esse problema pensando: "Como Maria pode se vestir?" Para isso ela precisará fazer escolhas: primeiro escolher uma calça, depois escolher uma blusa. Vamos montar uma tabela, na qual veremos que Maria pode se vestir de 8 maneiras diferentes.

| Calças | Blusas |
|---|---|
| Preta<br>Branca | Amarela<br>Azul<br>Verde<br>Vermelha |

Podemos também fazer um diagrama de árvore, como ilustrado abaixo:



Fonte: http://geematbrasil.blogspot.com.br/2008/04/palestra.html

Cada uma das linhas do lado direito do diagrama representa uma maneira de Maria se vestir. A terceira linha de cima para baixo, por exemplo, corresponde a ela se vestir com uma calça preta e uma blusa amarela.

É importante notar que, para resolver o nosso problema, não há diferença entre o diagrama e a tabela. Eles são distintos na aparência, mas ambos equivalem a fazer uma lista completa das maneiras possíveis para que Maria se vista.

Vamos agora resolver outra vez o Problema 1, pensando que Maria deve escolher primeiro uma calça e depois uma blusa. Então:

**1° Situação:** Se Maria escolher a calça preta, terá 4 possibilidades para escolher uma blusa, que pode ser amarela, azul, verde ou vermelha;

**2° Situação:** Se ela escolher a calça branca, também terá 4 possibilidades para escolher uma blusa.

Ao final, concluímos que Maria pode se vestir de 8 (2 x 4 = 8) maneiras diferentes.

Em resumo, Maria tem 2 escolhas para a calça e, para cada uma destas escolhas, ela tem 4 escolhas para a blusa; logo, ela pode se vestir de 8 (2 x 4 = 8) maneiras diferentes.

Por que resolvemos mais uma vez o problema 1? A resposta é simples, pois este último modo de resolver o problema funciona para qualquer número de calças e blusas, sem nenhum trabalho adicional.

Imagine que Maria tivesse 397 calças de cores diferentes e 572 blusas, também de cores diferentes. Nesse caso, uma tabela ou um diagrama ficariam muito grandes (certamente não caberiam em uma folha de papel!) e levariam um tempo enorme para serem elaborados.

Por outro lado, o raciocínio anterior funciona sem que seja necessário fazer tabelas ou diagramas: para cada uma das 397 escolhas de calça, Maria tem 572 escolhas de blusa. Logo, ela pode se vestir de 227.084 maneiras diferentes: 397 X 572 = 227 084 maneiras.

Vamos recapitular esse raciocínio. Para saber de quantas maneiras Maria pode se vestir, imaginamos que ela precisa fazer duas escolhas consecutivas: primeiro escolher uma calça, depois uma blusa. Para cada escolha de calça, o número de escolhas de blusa é sempre o mesmo, e assim a resposta ao Problema 1, qualquer que seja o número de calças e de blusas, é:

| |
|---|
| Número de calças × Número de blusas |

**ATENÇÃO:**

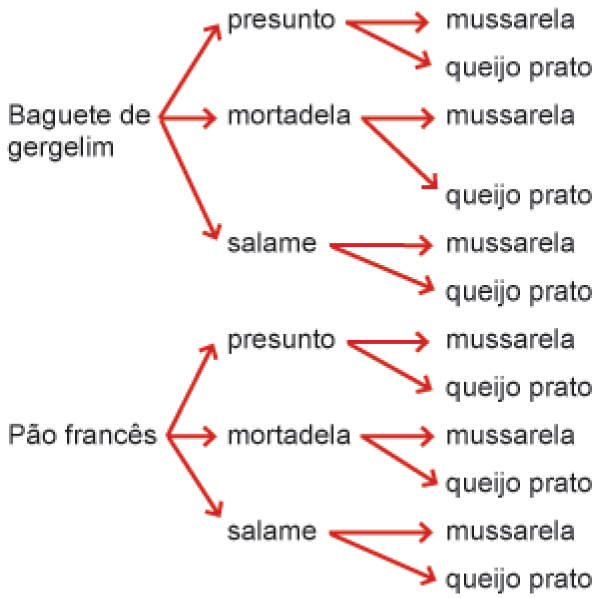
**PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO PARA DUAS ESCOLHAS:** O número de maneiras de fazer duas escolhas consecutivas, quando o número de possibilidades para a segunda escolha independe do resultado da primeira escolha, é igual ao número de possibilidades da primeira escolha vezes o número de possibilidades da segunda escolha.

Agora vamos expandir esse conhecimento e resolver outro problema!

**PROBLEMA 02:**

Lara quer preparar sanduíches para vender. Ela comprou dois tipos de pão (baguete e francês), três tipos de frios (presunto, mortadela e salame) e dois tipos de queijo (mussarela e prato). Quantos tipos de sanduíche Lara vai conseguir preparar usando um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de frio em cada um?

Podemos utilizar a ideia do Princípio Multiplicativo para resolver esse problema. Veja a árvore de possibilidades.




Fonte: http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/diagnostico-incial-o-que-eles-ja-sabem-528156.shtml?page=all

Lara tem 2 escolhas para o tipo do pão, 3 escolhas diferentes para o tipo de frios e 2 escolhas diferentes para o tipo de queijo. Logo, ela terá 12 maneiras diferentes de montar os sanduíches. Observe:

$$\underset{\text{Pão}}{\underline{\ 2\ }} \times \underset{\text{Frios}}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{\text{Queijo}}{\underline{\ 2\ }} = 12 \text{ maneiras diferentes.}$$

Chegou a hora de praticar!

Resolva a Ficha de Atividades a seguir para exercitar os conhecimentos que você adquiriu.

## Atividade 1

**01.** Eu possuo 4 pares de sapatos e 10 pares de meias. De quantas maneiras poderei me calçar utilizando um par de meias e um de sapatos?

**02.** Pedro decidiu comemorar seu aniversário juntamente com sua namorada Deise, saindo para jantar num restaurante. Na hora marcada, Pedro chegou à casa de Deise, que estava nervosa, pois não conseguia achar a combinação ideal de roupas para sair.

Ainda nervosa, Deise apresentou a Pedro as roupas de que dispunha para escolher. Veja as opções que Deise possuía:

Fonte : CECIERJ – Mat_1B_1C_Roteiro de Ação 1

a) Com essa quantidade de roupa, de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir?

b) Deise disse a Pedro que gostaria muito de usar a camisa de cor rosa. Pediu a opinião de Pedro sobre qual combinação usar. Após essa decisão, de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir?

**03.** Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em cinco cores diferentes. Um consumidor que quiser adquirir esse veículo terá quantas opções de escolha?

**04.** Quantos divisores naturais possui o número 72?

# Aula 2: Trabalhando com Permutações

As situações-problema que resolvemos na aula anterior exigiram uma forma organizada de dispor os dados de modo a permitir a contagem de seus elementos. A parte da Matemática que desenvolve modelos que permitem a solução através de procedimentos de contagem é a Análise Combinatória.

Apesar do Princípio Fundamental de Contagem ser uma ideia básica para resolução desses problemas, há outros processos de contagem que possuem características específicas e que aparecem de forma frequente.

Vamos dar início a uma destas formas específicas, denominada **Permutação.**

## 1 – PERMUTAÇÕES SIMPLES:

**PROBLEMA 01**:

De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem fazer uma fila para entrar no ônibus?

Para resolver esse problema, escolhemos a pessoa que vai entrar no ônibus em primeiro lugar, depois a que vai entrar em segundo lugar, e assim por diante, até a que vai entrar no ônibus por último.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Possibilidades: | 5 | x | 4 | x | 3 | x | 2 | x | 1 | = | 120 |
| Lugares: | 1° | | 2° | | 3° | | 4° | | 5° | | |

Logo, há 120 possibilidades distintas de se formarem as filas.

Fonte:http://anormal-anm.com/?attachment_id=5217

**PROBLEMA 02:**

De quantas maneiras diferentes é possível arrumar 3 amigos sentados lado a lado num banco para fotografar?

Fonte: http://tueeueuetu.wordpress.com/momentos-eternos/

Novamente, para resolver este problema, escolhemos quem vai sentar no primeiro lugar, depois quem vai sentar no segundo lugar e quem vai sentar por último.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Possibilidades: | $\underline{3}$ | x | $\underline{2}$ | x | $\underline{1}$ | = | 6 |
| Lugares: | 1° | | 2° | | 3° | | |

Logo, há 6 possibilidades distintas de se organizar a fotografia.

As situações apresentadas são o que chamamos de **permutações simples** e se caracterizam pela colocação de pessoas ou objetos em fila ordenada.

Resumindo, permutação simples de **n** elementos distintos é todo agrupamento ordenado formado por esses **n** elementos.

$$\boxed{P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 1}$$

A esta altura você deve ter notado que vamos repetir o tempo todo expressões do tipo:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $\quad$ $4 \times 3 \times 2 \times 1$ $\quad$ $3 \times 2 \times 1$

### 1.1 – FATORIAL DE UM NÚMERO:

Dependendo dos números que aparecem no enunciado do problema, estas expressões podem se tornar bastante longas, por isso é conveniente achar uma maneira de escrevê-las de forma mais compacta. Uma forma de exprimir todos estes produtos é usar o **fatorial**, indicado por um ponto de exclamação ao lado do número.

- $3 \times 2 \times 1 = 3!$
- $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$
- $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

Lê-se, respectivamente, 3 fatorial, 4 fatorial e 5 fatorial.

O fatorial de um número **n** (sendo **n** pertencente ao conjunto dos números naturais) é sempre o produto de todos os números naturais de 1 a n. A representação é feita pelo número, seguido do sinal de exclamação: **n!**

**IMPORTANTE:**

- O fatorial de 0 (**0!**) é 1, ou seja, **0! = 1.**
- Não existe fatorial para números negativos.

Podemos usar o fatorial para expressar a fórmula da **Permutação Simples:**

$$\boxed{P_n = n!}$$

## Atividade 2

**01.** Seis amigos irão a um Ciber-café, onde pretendem passar a tarde jogando GTA. Cada um deles sentará em um computador.
Sabendo que estão disponíveis seis computadores lado a lado, de quantas maneiras distintas os amigos podem ocupá-los?

Fonte: www.gtaspextreme.com.br

**02.** Em um município, a fiscalização sanitária inspeciona mensalmente, uma única vez, cada um dos 4 frigoríficos locais. A fim de surpreender os frigoríficos, os fiscais alteram mensalmente a ordem em que as inspeções são realizadas. Durante quantos meses os fiscais podem realizar esse procedimento sem que haja repetição na ordem dos frigoríficos inspecionados?

**03.** Para tentar melhorar seu índice no Ibope, uma emissora de televisão resolveu mudar a ordem de sua programação, no sábado, das 12 às 18 horas. Os programas exibidos neste horário são: esporte, documentário, religioso, variedades, filmes nacionais e filmes estrangeiros. Cada um desses programas tem duração de uma hora. Se o programa religioso deve ser o último a ser exibido, de quantas maneiras diferentes pode ser formada a programação?

**04.** Uma bibliotecária recebeu uma doação de 3 livros diferentes de Matemática, 4 livros diferentes de Química e 3 livros diferentes de Física. De quantas formas ela poderá arrumá-los em uma prateleira de livros novos?

# Aula 3: Estudando Arranjos

No campeonato mundial de Fórmula 1 de 2012, participaram 25 pilotos, entre quais se destacaram o alemão Sebastian Vettel, que foi o campeão, o espanhol Fernando Alonso, que foi o vice-campeão e o finlandês Kimi Raikomi, que ficou com a terceira colocação. Observe o quadro a seguir:

| Colocação | Piloto | Equipe | Total de Pontos |
|---|---|---|---|
| 1ª | Sebastian Vettel   | Red Bull | 281 |
| 2ª | Fernando Alonso   | Ferrari | 278 |
| 3ª | Kimi Raikkonen   | Lotus | 207 |

**1 – ARRANJO SIMPLES:**

Obviamente o *podium* (Sebastian Vettel, Fernando Alonso, Kimi Raikkonen) difere do *podium* (Kimi Raikkonem, Sebastian Vettel, Fernando Alonso), pois, neste caso, a ordem no grupo é um fator que o diferencia da posição de chegada.

Da mesma forma, se, em vez do finlandês, o terceiro colocado tivesse sido o brasileiro Filipe Massa, o *podium* final seria (Sebastian Vettel, Fernando Alonso, Felipe Massa), o que também diferencia do *podium* original.

Em casos como esse com elementos distintos, onde tanto a ordem de posicionamento no grupo quanto a natureza dos elementos causam diferenciação entre os agrupamentos, estamos diante de um caso de **Arranjos Simples.**

Vejamos a seguinte situação-problema:

**PROBLEMA 01:**

Considerando-se os 25 pilotos participantes, qual o número total de possibilidades para os três primeiros colocados?

Para o campeão, teríamos **25** possibilidades. Para o vice-campeão e para o terceiro colocado, teríamos, respectivamente **24** e **23** possibilidades. Pelo princípio fundamental da contagem, teríamos:

**25 x 24 x 23 = 13800**

Isto é, **13800** possibilidades.

## 1.1 – CÁLCULO DO ARRANJO SIMPLES:

Ao trabalharmos com arranjos simples, com **n** elementos distintos, agrupados **p** a **p**, com **p ≤ n**, podemos recorrer à seguinte fórmula:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Lê-se: arranjo de n, agrupados p a p.

Assim, a situação-problema proposta acima será resolvida da seguinte forma:

$$A_{25,3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 13\,800$$

Na situação-problema, temos 25 pilotos que deverão ser organizados em grupos de 3, no qual a ordem da escolha altera o resultado.

**PROBLEMA 02:**

Em uma escola, está sendo realizado um torneio de futebol de salão do qual dez times estão participando. Quantos jogos podem ser realizados entre os times participantes em turno e returno?

Como o campeonato possui dois turnos, os jogos da Equipe A x Equipe B e os jogos da Equipe B x Equipe A são considerados partidas distintas. Observe que, neste caso, estamos trabalhando com arranjos simples, pois importa a ordem dos elementos.

Devemos calcular $A_{10,2}$:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$$

Então podem ser realizados 90 jogos entre os times participantes.

## Atividade 3

**01.** João, André, William, Pedro, Roberto, Fabiano e Fábio estão apostando corrida. Quantos são os possíveis resultados para os três primeiros colocados?

**02.** Em uma urna de sorteio de prêmios, existem dez bolas, enumeradas de 0 a 9. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.

**03.** O número de telefone celular, na cidade do Rio de Janeiro é formado por 8 algarismos. Determine quantos números de telefone podemos formar com algarismos diferentes que comecem com 9 e terminem com 8.

***(Dica: O número 9 deve ser fixado na 1ª posição e o 8 na última. Restarão, portanto, 6 posições e 8 algarismos, pois eles precisam ser diferentes. Considerando que a ordem dos algarismos diferencie dois números de telefone, vamos arranjar 8 algarismos 6 a 6.)***

**04.** Em uma turma, quinze alunos se candidataram para representante e vice-representante. Eles serão escolhidos através do voto individual e direto de cada aluno da turma. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita.

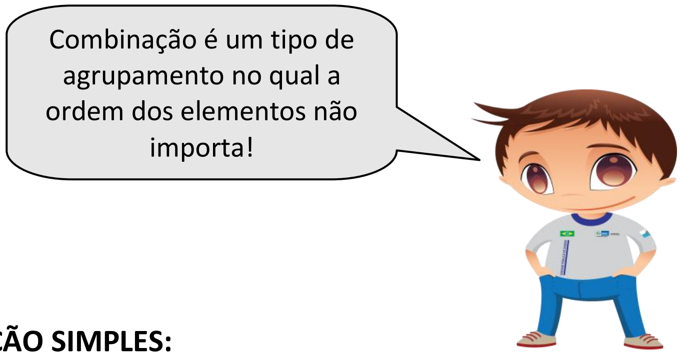
***(Dica: Trata-se de um agrupamento de 15 pessoas tomadas 2 a 2.)***

Fonte: http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-arranjo-simples.htm#resposta-506

http://www.matematicadidatica.com.br/ArranjoSimples.aspx

# Aula 4: Aprendendo Combinações

Caro aluno, nesta atividade você vai aprender a usar uma importante ferramenta de contagem, conhecida como Combinação.




**1 – COMBINAÇÃO SIMPLES:**

Para trabalharmos o conceito de permutação, vamos utilizar a mesma metodologia. Através de algumas situações-problemas, iremos definir o conceito.

**PROBLEMA 01:**

Um pizzaiolo tem à sua disposição ingredientes para fazer pizzas de cinco sabores diferentes: atum (A), calabresa (C), milho (M), frango (F) e quatro queijos (Q). Cada cliente pode escolher três sabores para sua pizza. Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três dos cinco sabores disponíveis?

Observe que, neste caso, escolher os sabores atum, calabresa e milho (A, C, M) é o mesmo que escolher milho, calabresa e atum (M, C, A). Ou seja, neste caso, a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.

Assim, você pode obter as possibilidades de pizzas que podem ser montadas combinando três dos cinco sabores disponíveis. Isso significa que você irá construir agrupamentos de três elementos dos cinco elementos disponíveis.

Os cinco elementos disponíveis são: (A, C, M, F, Q) e os agrupamentos possíveis não ordenados de três elementos são: (A, Q, C) (A, Q, M) (A, Q, F) (A, C, M) (A, C, F) (A, M, F) (C, M, F) (C, M, Q) (C, F, Q ) (M, F, Q).

Veja que esses agrupamentos se diferenciam pela natureza dos seus elementos, e não pela ordem dos mesmos. Cada uma dessas possibilidades corresponde a uma **combinação** de 5 sabores tomados 3 a 3. Como são 10 possibilidades, você tem: $C_{5,3} = 10$.

De uma forma geral, a **Combinação Simples** de **n** elementos distintos (diferentes) tomados p a p, com n ≥ p, é todo agrupamento não ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados.

### 1.1 – CÁLCULO DA COMBINAÇÃO SIMPLES:

A quantidade total de agrupamentos é indicada por $C_{n,p}$ é calculada por:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}}$$

Lê-se: Combinação de n tomados p a p.

Agora, use a fórmula para o cálculo das possibilidades do problema anterior:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

O que dá o mesmo número de possibilidades.

**PROBLEMA 02:**

Um fabricante de sorvetes possui à disposição 7 variedades de frutas tropicais do nordeste brasileiro e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sorvetes. Quantos serão os tipos de sorvete disponíveis?

Veja que as combinações dos sabores de umbu com seriguela e de seriguela com umbu constituem um mesmo tipo de sorvete, pois não há distinção pela ordem da escolha das frutas utilizadas.

Aqui você tem um caso de combinação simples que será resolvido através do cálculo de $C_{7,2}$:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Chegou a hora de praticar!

Resolva a Ficha de Atividades a seguir para exercitar os conhecimentos que você adquiriu.

## Atividade 4

**01.** Lucas vai realizar uma viagem neste fim de semana e quer escolher quatro entre nove camisetas de malha que possui. De quantos modos distintos ele pode escolher as camisetas?

**02.** No preparo de uma banana *split*, uma sorveteria oferece 12 sabores de sorvete, entre os quais o freguês pode escolher 4. Sabendo que certo freguês deseja escolher 4 sabores diferentes, de quantas maneiras pode ser preparada esta banana *split*?

**03.** As 14 crianças de uma família serão separadas em grupos de 5, para que elas arrecadem prendas para a quermesse da fazenda onde vivem. De quantas maneiras as crianças poderão ser agrupadas?

**04.** Em uma sala com 20 alunos, quantas comissões de 2 alunos podemos formar?

# Aula 5: Diferenciando Arranjos e Combinações

Caro aluno, muitas vezes, quando tentamos resolver um problema de análise combinatória, deparamo-nos com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são arranjos ou combinações?

Para eliminar essa dúvida, devemos agir da seguinte maneira: construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento:

- Se, com essa mudança na ordem dos elementos, obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esse agrupamento é um **arranjo**.
- Se, com essa mudança na ordem dos elementos, obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esse agrupamento é uma **combinação.**

Vejamos as seguintes situações-problema:

**PROBLEMA 01:**

**Uma comissão de quatro membros deve ser escolhida dentre sete pessoas. De quantos modos diferentes se pode escolher a comissão, sabendo que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?**

Como a ordem dos membros componentes **não** altera a comissão, temos que uma comissão é uma **combinação.**

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

**PROBLEMA 02:**

**Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras, seguidas de quatro algarismos. Considerando essas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas iniciadas pelas letras R I O, nessa ordem.**

Como a ordem dos algarismos altera a identificação da placa, temos que a identificação de uma placa é um **arranjo.**

$$A_{26,4} = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 303\ 600$$

Chegou a hora de praticar! Resolva a Ficha de Atividades a seguir para exercitar os conhecimentos que você adquiriu.

## Atividade 5

**01.** Numa estrada de ferro, há 10 estações. Quantos bilhetes deverão ser impressos, de modo que cada um deles contenha as estações de partida e de chegada?

**02.** Quantas diretorias de 4 membros podemos formar com os 10 sócios de uma empresa?

**03.** Um professor propôs, para uma de suas turmas, uma prova com 7 questões, entre as quais cada aluno deveria escolher exatamente 5 questões para responder. Sabe-se que não houve duas escolhas das mesmas 5 questões entre todos os alunos da turma. Determine o número máximo de alunos que essa turma poderia possuir.

**04.** Em uma sala há 8 cadeiras e 4 pessoas. Determine o número de modos distintos das pessoas ocuparem as cadeiras.

# Aula 6: Introdução ao Estudo de Probabilidades

Em uma escola, ocorreu uma gincana vencida pela turma do 3º ano. Um *tablet* será sorteado entre os 30 alunos da uma turma vencedora na festa de encerramento da gincana.

Os alunos foram numerados de 1 a 30 e os números foram marcados em 30 cupons idênticos e colocados em uma urna.

O diretor da escola retira um cupom da urna. Não sabemos qual é o número sorteado: pode ser 1, 2, 3, ..., 30. Trata-se, então, de um experimento cujo resultado não pode ser previsto com certeza. Dizemos que se trata de um **experimento de natureza aleatória (casual).**

Agora, suponha que um dado seja lançado. Não é possível dizer, com certeza, qual o número escrito na face superior. Pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Trata-se, também, de um experimento aleatório cujo resultado, entre os possíveis, é imprevisível.

Assim, denomina-se experimento aleatório qualquer experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso. São experimentos aleatórios:

- Lançamento de uma moeda;
- Lançamento de dois dados;

**1 – ESPAÇO AMOSTRAL DE UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO:**

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório e vamos indicá-lo por E.

**EXEMPLOS:**

a) No experimento aleatório "lançamento de uma moeda", temos como espaço amostral E = {cara, coroa}.

b) No experimento aleatório "lançamento de dois dados", temos como espaço amostral E= $\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$

**2 – EVENTO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL:**

É qualquer subconjunto do espaço amostral.

**EXEMPLOS:**

a) No lançamento de um dado, por exemplo, em relação à face voltada para cima, o subconjunto de E, A = {1, 2, 3, 4}, é um evento de E. Note que n(A) = 4.

b) No lançamento de uma moeda, por exemplo, em relação à face voltada para cima, o subconjunto de E, B = {cara}, é um evento de E. Note que n(B) = 1.

c) No lançamento de dois dados, por exemplo, em relação à face voltada para cima, o subconjunto de E, C = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}, é um evento de E. Note que n(C) = 5.

**3 - PROBABILIDADE DE UM EVENTO:**

Sejam E um espaço amostral finito e não-vazio e A um evento desse espaço. Definimos "probabilidade de A" e indica-se por P(A) o seguinte número:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}}$$

Essa definição é válida quando o espaço amostral E for equiprovável, isto é, quando todos os elementos de E tiverem a mesma probabilidade.

De maneira informal, podemos interpretar a razão acima como: "a probabilidade de ocorrer um evento é obtida pelo quociente (divisão) entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis”.

**OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:**

a) No lançamento de um dado, determinar a probabilidade de se obter uma face voltada para cima menor que 5.

Sendo E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, portanto n(E) = 6.

Obter uma face voltada para cima menor que 5:

A = {1, 2, 3, 4}, logo n(A) = 4.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \cong 66{,}67\%$$

b) No lançamento de uma moeda, determinar a probabilidade de se obter cara.

Sendo E = {cara, coroa}, portanto n(E) = 2.

Obter a face cara voltada para cima:

B = {cara}, logo n(B) = 1.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

c) No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 6?

Sendo E= $\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$, portanto n(E) = 36

Obter soma dos pontos das faces voltadas para cima igual a 6:

C = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}, note que n(C) = 5.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(E)} = \frac{5}{36} = 0{,}13888\ldots \cong 13{,}89\ \%$$

Vamos praticar!

Resolva a Ficha de Atividades a seguir para exercitar os conhecimentos que você adquiriu.

## Atividade 6

**01.** Yasmin lança um dado sem que Isadora veja. Yasmin apenas diz que o número mostrado pelo dado é ímpar. Determine a probabilidade de Isadora acertar.

**02.** Determine a probabilidade de se conseguir dois números iguais no lançamento simultâneo de dois dados.

**03.** Escolhido ao acaso um elemento do conjunto de divisores positivos de 60, determine a probabilidade de que ele seja primo.

**04.** Um dos anagramas da palavra VIDA é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que no anagrama apareça a palavra DIVA?

# Avaliação

Caro aluno, chegou a hora de avaliar tudo o que nós estudamos nas aulas anteriores. Leia atentamente cada uma das questões e faça os cálculos necessários. Vamos lá, vamos tentar?

**01.** Classifique cada uma das situações a seguir em arranjo (A), combinação (C) e permutação (P):

| **Situação** | **Tipo de Agrupamento** |
|---|---|
| O técnico de basquete do seu time dispõe de 5 pivôs e pretende usar 2 em cada formação. Quantas formações ele pode armar trocando, pelo menos, 1 pivô? | |
| O professor de futebol está com 11 candidatos e pretende testar esses meninos em todas as posições possíveis. Para isso, vai fazer um rodízio, jogando com os 11 meninos em todas as posições. Quantos times terá formado, se considerar times distintos aqueles em que haja, pelo menos, 1 troca de posição? | |
| No treino de amanhã, o técnico da seleção de vôlei de Calculândia quer treinar seus 8 jogadores nas posições de ataque pela direita, ataque pela esquerda e ataque pelo centro. Quantos trios ele vai formar, considerando como diferentes trios que tenham, pelo menos, 1 posição ocupada por 1 jogador diferente? | |
| Num campeonato de xadrez entre 10 jogadores, cada jogador vai jogar uma única partida com cada um dos adversários. Quantas partidas ocorrerão? | |
| A turma 3012 vai participar de um campeonato de queimado. As equipes são formadas com 10 jogadores. A turma tem 25 alunos e todos querem participar. O professor de Educação Física pediu que eles contassem quantas equipes poderiam formar, considerando diferentes 2 equipes em que haja, pelo menos, 1 jogador diferente. Quantas equipes serão? | |

**02. (Saerjinho, 3º Bimestre de 2011, 3º série)** Doze competidores disputam um campeonato de xadrez em que o resultado não permite empate. De quantos modos diferentes podemos ter a classificação dos três primeiros lugares?

(A) 1728

(B) 1320

(C) 220

(D) 36

(E) 33

**03. (Saerjinho, 3º Bimestre de 2011, 3º série)** Ana comprou um conjunto ornamental para jardins, composto pela Branca de Neve e os sete anões e pretende organizá-los em fila. De quantas maneiras diferentes esses enfeites podem ser organizados no jardim (considerando como maneiras diferentes aquelas em que a ordem das estátuas seja diferente)?

(A) 8

(B) 16

(C) 64

(D) 20160

(E) 40320

**04. (Saerjinho, 3º Bimestre de 2011, 3º série)** O time de vôlei de uma cidade vai fazer uma seleção para escolher um jogador que irá se juntar à equipe para disputar um campeonato. No dia do teste, apareceram 24 meninos da própria cidade e 12 meninos de outra cidade vizinha. Qual é a probabilidade do escolhido ser da cidade vizinha?

(A) $\frac{1}{36}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{2}{3}$

**05. (Saerjinho, 1º Bimestre de 2011, 3º série)**

Observe o resultado de uma pesquisa na classe de Júlia.

| **Computador** | **Nº de Alunos** |
|---|---|
| Possui computador | 18 |
| Não possui computador | 12 |

Escolhendo um aluno dessa classe, ao acaso, qual é a probabilidade de que ele tenha computador?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{2}$

# Pesquisa

Caro aluno, agora que já estudamos todos os principais assuntos relativos ao 1° bimestre, é hora de discutir um pouco sobre a importância deles na nossa vida. Então, vamos lá!

Iniciamos este estudo conhecendo o Princípio Multiplicativo e introduzimos os conceitos de Análise Combinatória. Por último, fizemos um estudo do Cálculo das Probabilidades.

Ouça o arquivo em áudio sobre a História da Probabilidade disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1253 - Bloco 1.

Em seguida, leia atentamente as questões e, através de uma discussão com o seu grupo, responda a cada uma delas de forma clara e objetiva.

**1 –** Apresente alguns exemplos ou situações reais nas quais podemos encontrar a necessidade de usar o cálculo de Probabilidade.

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

**2 –** O roteiro faz menções a apostas em jogos de dados, Roma e seus imperadores Cláudio e Júlio César, à França e seus costumes durante o século XVII, e, também, a alguns matemáticos que participaram do desenvolvimento da teoria da probabilidade.

Quais os matemáticos mencionados no arquivo em áudio foram importantes para o desenvolvimento desta teoria?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

**3 –** Por causa do interesse por jogos de azar predominante na época, a teoria da probabilidade se tornou rapidamente bastante popular, tendo sido posteriormente aplicada a diversas outras áreas, como, por exemplo, a estatística. A que outros jogos de azar podemos aplicar a teoria das probabilidades nos dias de hoje? Por quê?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

*(**ATENÇÃO:** Fazer esta parte da atividade em uma folha separada!)*

# Referências

**[1]** GIOVANNI, José Ruy. *Matemática: uma nova abordagem*. vol. 2. São Paulo: FTD, 2000.

**[2]** HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar 5: Combinatória, probabilidade.* 7 ed. São Paulo: Atual, 2004

**[3]** IEZZE, G.; DOLCE, O. *Matemática* (volume único). 4ª. Edição. São Paulo: Atual, 2007.

PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática/Manoel Paiva*. São Paulo: Moderna, 1995.

# Equipe de Elaboração

**COORDENADORES DO PROJETO**

**Diretoria de Articulação Curricular**
Adriana Tavares Maurício Lessa

**Coordenação de Áreas do Conhecimento**

Bianca Neuberger Leda
Raquel Costa da Silva Nascimento
Fabiano Farias de Souza
Peterson Soares da Silva
Ivete Silva de Oliveira
Marília Silva

**COORDENADORA DA EQUIPE**

**Raquel Costa da Silva Nascimento**
Assistente Técnico de Matemática

**PROFESSORES ELABORADORES**

Alan Jorge Ciqueira Gonçalves
Ângelo Veiga Torres
Daniel Portinha Alves
Fabiana Marques Muniz
Herivelto Nunes Paiva
Izabela de Fátima Bellini Neves
Jayme Barbosa Ribeiro
Jonas da Conceição Ricardo
José Cláudio Araújo do Nascimento
Reginaldo Vandré Menezes da Mota
Weverton Magno Ferreira de Castro